

Kombinatorika Megoldások

- 1) A szóbeli érettségi vizsgán az osztály 22 tanulója közül az első csoportba öten kerülnek.

a) Hányféleképpen lehet a 22 tanulóból véletlenszerűen kiválasztani az első csoportba tartozókat? (2 pont)

Először mindenki történelemből felel.

b) Hányféle sorrendben felelhet történelemből az 5 kiválasztott diák? (2 pont)

Megoldás:

a) $\binom{22}{5} = 26334$ (2 pont)

b) $5! = 120$ (2 pont)

Összesen: 4 pont

- 2) Egy iskolának mind az öt érettségiző osztálya 1-1 táncot mutat be a szalagavató bálon. Az A osztály palotást táncol, ezzel indul a műsor. A többi tánc sorrendjét sorsolással döntik el. Hányféle sorrend alakulhat ki? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az első táncra rögzített az A osztály. A további négy táncnak $4!$ sorrendje lehetséges. (2 pont)

$4! = 24$ -féle sorrend alakulhat ki. (1 pont)

Összesen: 3 pont

- 3) Hány különböző háromjegyű pozitív szám képezhető a 0, 6, 7 számjegyek felhasználásával? (2 pont)

Megoldás:

$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ -féle szám képezhető. (2 pont)

- 4) Egy szellemi vetélkedő döntőjébe 20 versenyzőt hívnak be. A zsűri az első három helyezettet és két további különdíjast fog rangsorolni. A rangsorolt versenyzők oklevelet és jutalmat kapnak.

a) Az öt rangsorolt versenyző mindegyike ugyanarra a színházi előadásra kap egy-egy jutalomjegyet. Hányféle kimenetele lehet ekkor a versenyen a jutalmazásnak? (4 pont)

b) A dobogósok három különböző értékű könyvutalványt, a különdíjasok egyike egy színházjegyet, a másik egy hangversenyjegyet kap. Hányféle módon alakulhat ekkor a jutalmazás? (4 pont)

c) Ha már eldőlt, kik a rangsorolt versenyzők, hányféle módon oszthatnak ki nekik jutalmul öt különböző verseskötetet? (3 pont)

d) Kis Anna a döntő egyik résztvevője. Ha feltesszük, hogy a résztvevők egyenlő eséllyel versenyeznek, mekkora a valószínűsége, hogy Kis Anna eléri a három dobogós hely egyikét, illetve hogy az öt rangsorolt személy egyike lesz? (6 pont)

Megoldás:

- a) $\binom{20}{5}$ -féle (3 pont)
15504 jutalmazási sorrend lehetséges. (1 pont)
- b) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$, (3 pont)
azaz 1860480 jutalmazási sorrend lehetséges. (1 pont)
- c) $5! = 120$ -féle kiosztás lehetséges. (3 pont)
- d) Lásd: Valószínűségszámítás 5. feladat

Összesen: 17 pont

- 5) Egy négytagú társaság e-mail kapcsolatban van egymással. Bármelyikük egy-egy társának legfeljebb egy levelet ír hetente. Válassza ki a felsorolt lehetőségek közül, hogy maximum hány levelet írhatott összesen egymásnak a társaság 4 tagja 1 hét alatt? Válaszát indokolja!
- a) $4 \cdot 4 = 16$
 - b) $4 \cdot 3 = 12$
 - c) $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ (3 pont)

Megoldás:

Mind a négy ember maximum három levelet írhatott egy héten: $(4 \cdot 3)$. (2 pont)
12 vagy b) (1 pont)

Összesen: 3 pont

- 6) Egy televíziós játékban 5 kérdést tehet fel a játékvezető. A játék során a versenyző, ha az első kérdésre jól válaszol, 40 000 forintot nyer. Minden további kérdés esetén döntenie kell, hogy a játékban addig megszerzett pénzének 50, 75 vagy 100 százalékát teszi-e fel. Ha jól válaszol, feltett pénzének kétszeresét kapja vissza, ha hibázik, abba kell hagynia a játékot, és a fel nem tett pénzt viheti haza.
- a) Mennyi pénzt visz haza az a játékos, aki mind az öt feltett kérdésre jól válaszol, s bátran kockáztatva mindig a legnagyobb tétet teszi meg? (4 pont)
 - b) Az a játékos, aki mindig helyesen válaszol, de óvatos, és a négy utolsó fordulóban pénzének csak 50%-át teszi fel, hány forintot visz haza? (4 pont)
 - c) A vetélkedő során az egyik versenyző az első négy kérdésre jól válaszolt. A második kérdésnél a pénzének 100 %-át, a 3., 4. és 5. kérdés esetén pénzének 75 %-át tette fel. Az 5. kérdésre sajnos rosszul válaszolt. Hány forintot vihetett haza ez a játékos? (5 pont)
 - d) Egy versenyző mind az 5 fordulóban jól válaszol, és közben minden fordulóban azonos eséllyel teszi meg a játékban megengedett lehetőségek valamelyikét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az elnyerhető maximális pénzt viheti haza? (4 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 44. feladat
- b) Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 44. feladat
- c) Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 44. feladat

- d) Az összes esetek száma a 4 utolsó fordulóban $3^4 = 81$. (2 pont)
 A kedvező esetek száma 1. (1 pont)
 A keresett valószínűség (a klasszikus modell szerint): $\frac{1}{81} \approx 0,012$ (1 pont)
Összesen: 17 pont

- 7) Októberben az iskolában hat osztály nevezett be a focibajnokságra egy-egy csapattal. Hány mérkőzést kell lejátszani, ha mindenki mindenkivel játszik, és szerveznek visszavágókat is? (3 pont)

Megoldás:

A lejátszandó mérkőzések száma: $\frac{6 \cdot (6-1)}{2} \cdot 2 = 30$. (3 pont)

Összesen: 3 pont

- 8) A piacon az egyik zöldségespultnál hétféle gyümölcs kapható. Kati ezekből háromfélét vesz, mindegyikből 1-1 kilót. Hányféle összeállításban választhat Kati? (A választ egyetlen számmal adja meg!) (2 pont)

Megoldás:

$\binom{7}{3} =$ (1 pont)

35-féleképpen választhat. (1 pont)

- 9) A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andrásen kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl.

- a) Szemléltesse gráffal a lejátszott mérkőzéseket! (4 pont)
 b) Hány mérkőzés van még hátra? (3 pont)
 c) Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a hat versenyző közül Dani az első két hely valamelyikén végez? (5 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Logika, gráfok 5. feladat (4 pont)

- b) Ha mindenki mindenkivel egyszer játszik, akkor a mérkőzések száma

$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (2 pont)

6 mérkőzést már lejátszottak, **ezért 9 mérkőzés van még hátra.** (1 pont)

- c) Ha Dani az első helyen végez, akkor a többiek $5! = 120$ -féleképpen „követhetik”. (2 pont)

Ugyanennyi lehetőség van akkor is, ha Dani második. (2 pont)

Így a kérdéses lehetőségek száma: **240.** (1 pont)

Összesen: 12 pont

- 10) Hány olyan háromjegyű szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, amelyekben csupa különböző számjegyek szerepelnek? (2 pont)

Megoldás:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

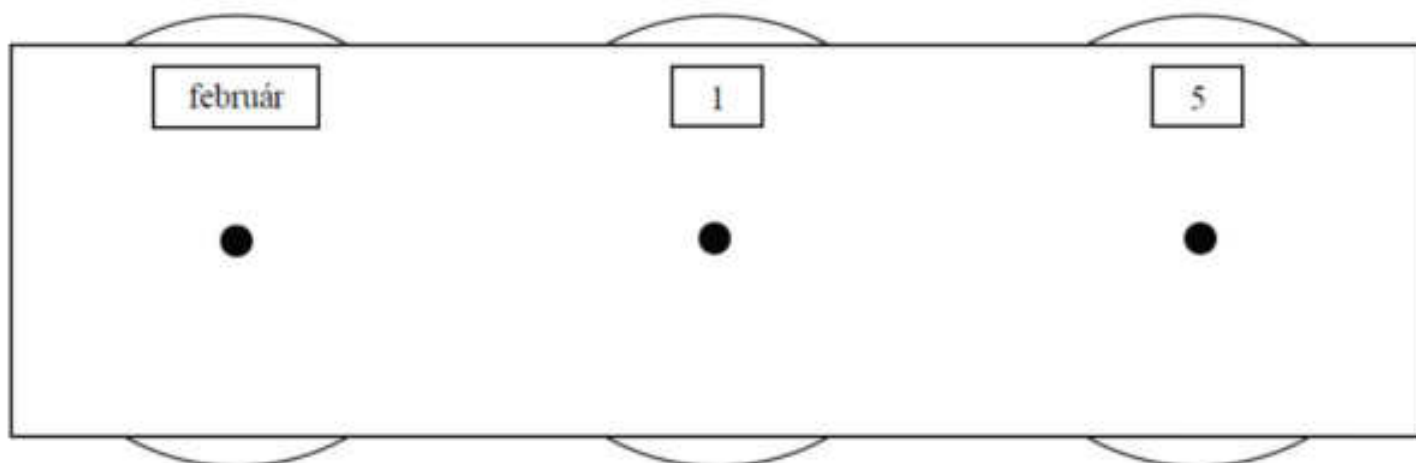
11) Az iskola rajztermében minden rajzasztalhoz két széket tettek, de így a legnagyobb létszámú osztályból nyolc tanulónak nem jutott ülőhely. Minden rajzasztalhoz betettek egy további széket, és így hét üres hely maradt, amikor ebből az osztályból mindenki leült.

a) Hány rajzasztal van a teremben? Hányan járnak az iskola legnagyobb létszámú osztályába? (6 pont)

A rajzterem falát (lásd az ábrán) egy naptár díszíti, melyen három forgatható korong található. A bal oldali korongon a hónapok nevei vannak, a másik két korongon pedig a napokat jelölő számjegyek forgathatók ki. A középső korongon a 0, 1, 2, 3; a jobb szélsőn pedig a 0, 1, 2, 3,8, 9 számjegyek szerepelnek. Az ábrán beállított dátum február 15. Ezzel a szerkezettel kiforgathatunk valóságos vagy csak a képzeletben létező „dátumokat”.

b) Összesen hány „dátum” forgatható ki? (3 pont)

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három korongot véletlenszerűen megforgatva olyan dátumot kapunk, amely biztosan létezik az évben, ha az nem szökőév. (3 pont)



Megoldás:

a) Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 45. feladat

b) A lehetséges „dátumok” száma: $12 \cdot 4 \cdot 10$, (2 pont)
tehát **480 „dátum” forgatható ki.** (1 pont)

c) Lásd: Valószínűségszámítás 13. feladat

Összesen: 12 pont

12) Egy 7-tagú társaságban mindenki mindenkivel egyszer kezet fogott. Hány kézfogás történt? (2 pont)

Megoldás:

21 kézfogás történt. (2 pont)

Összesen: 2 pont

13) A 9.B osztály létszáma 32 fő. Közülük először egy osztálytitkárt, majd egy titkárhelyettest választanak. Hányféleképpen alakulhat a választás kimenetele? (2 pont)

Megoldás:

$32 \cdot 31 = 992$ -féleképpen. (2 pont)

Összesen: 2 pont

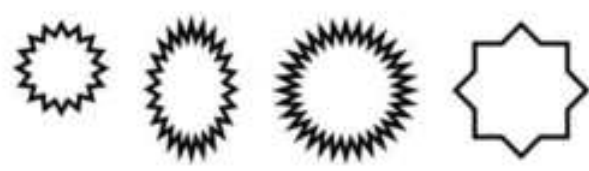
14) Ha az eredetileg $I_0 \left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2} \right)$ intenzitású lézersugár x mm ($x \geq 0$) mélyre hatol egy bizonyos anyagban, akkor ebben a mélységben intenzitása $I(x) = I_0 \cdot 0,1^{\frac{x}{6}} \left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2} \right)$ lesz. Ezt az anyagot $I_0 = 800 \left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2} \right)$ intenzitású lézersugárral világítják meg.

a) Töltse ki az alábbi táblázatot! (Az intenzitásra kapott mérőszámokat egészre kerekítve adja meg!) (3 pont)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x) \left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2} \right)$	800						

b) Mekkora mélységben lesz a behatoló lézersugár intenzitása az eredeti érték (I_0) 15 %-a? (A választ tizedmilliméterre kerekítve adja meg!) (6 pont)

c) Egy gyermekszínház műsorának valamelyik jelenetében dekorációként az ábrán látható elrendezés szerinti négy csillag közül egyeseket zöld vagy kék lézerfénnel rajzolnak ki. Hány különböző dekorációs terv készülhet, ha legalább egy csillagot ki kell rajzolni a lézerrel?



(8 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Szöveges feladatok 12. feladat
 - b) Lásd: Szöveges feladatok 12. feladat
 - c) Minden csillag esetében három lehetőség van a megvilágításra: kék, zöld, nincs kirajzolva. (3 pont)
- A különböző dekorációs tervek száma ezért: $3^4 = 81$. (4 pont)
- Legalább egy csillagot ki kell rajzolni, így a lehetőségek száma $81 - 1 = 80$. (1 pont)
- Összesen: 17 pont**

15) Annának kedden 5 órája van, mégpedig matematika (M), német (N), testnevelés (T), angol (A) és biológia (B). Tudjuk, hogy a matematikaórát testnevelés követi, és az utolsó óra német. Írja le Anna keddi órarendjének összes lehetőségét! (2 pont)

Megoldás:

- Felsorolás:
- MTABN, MTBAN, AMTBN
 - BMTAN, ABMTN, BAMTN
- (2 pont)

16) Az ábrán egy ejtőernyős klub kitűzője látható. (Az egyik körív középpontja a szabályos háromszög A csúcsa, a másik körív középpontja az A csúccsal szemközti oldal felezőpontja.)

Ezt a lapot fogják tartományonként színesre festeni.

a) Számítsa ki egyenként mindhárom tartomány területét, ha $a = 2,5$ cm! Számításait legalább két tizedesjegy pontossággal végezze, és az így kapott eredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

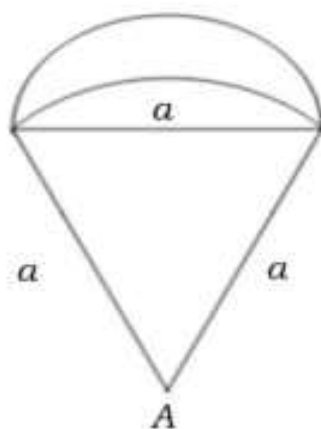
b) Hányféle módon festhető színesre a kitűző, ha minden tartományt a piros, sárga, zöld és kék színek valamelyikére festenek a következő két feltétel együttes figyelembe vételével:

(1) szomszédos tartományok nem lehetnek azonos színűek;

(2) piros és sárga színű tartomány nem lehet egymás mellett.

(Szomszédos tartományoknak van közös határvonala.)

(11 pont)



Megoldás:

a) Az a oldalú szabályos háromszög területe:

$$t_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \approx 2,7 (\text{cm}^2) \quad (1 \text{ pont})$$

A szabályos háromszög feletti tartomány egy a sugarú kör 60° -os középponti szögéhez tartozó körszelet, amelynek területe:

$$t_2 = \frac{a^2 \pi}{6} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 0,6 (\text{cm}^2) \quad (1 \text{ pont})$$

A legfelső „holdacska” területét úgy kapjuk, hogy az $\frac{a}{2}$ sugarú félkör területéből kivonjuk a körszelet területét.

$$t_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \pi - t_2 = \frac{a^2 \pi}{8} - \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 1,9 (\text{cm}^2). \quad (1 \text{ pont})$$

b) Ha csak az (1) feltételt vesszük figyelembe, akkor a „holdacska” színe négyféle lehet, (1 pont)

a körszelet színe (1) miatt már csak háromféle, (1 pont)

a szabályos háromszög színe pedig szintén háromféle, hiszen csak a körszelet színével nem lehet azonos. (1 pont)

Az (1) feltételnek megfelelő színezések száma tehát $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$. (1 pont)

Ebből a 36 esetből kell elvonnunk azokat az eseteket, amelyekre (2) nem teljesül. (1 pont)

Azoknak a lehetőségeknek a száma, amikor 3 színnel színezünk, és piros tartomány van sárga mellett $4 \cdot 2 = 8$ (2 pont)

ugyanis négyféleképpen helyezkedhet el egymás mellett a piros és a sárga tartomány, és a harmadik szín mindegyik esetben kétféle lehet. (1 pont)

Olyan kifestés, ahol csak a piros és sárga használnánk, kétféle lehet. (2 pont)

Így a mindkét feltételnek megfelelő színezések száma: $36 - (8 + 2) = 26$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

17) András, Balázs, Cili, Dóra és Enikő elhatározták, hogy sorsolással döntenek arról, hogy közülük ki kinek készít ajándékot. Úgy tervezték, hogy a neveket ráírják egy-egy papír cetlire, majd a lefelé fordított öt cédulát összekeverik, végül egy sorban egymás mellé leteszik azokat az asztalra. Ezután, keresztnévük szerinti névsorban haladva egymás után vesznek el egy-egy cédulát úgy, hogy a soron következő mindig a bal szélső cédulát veszi el.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy az elsőnek húzó Andrásnak a saját neve jut? (5 pont)

b) Írja be az alábbi táblázatba az összes olyan sorsolás eredményét, amelyben csak Enikőnek jut a saját neve! A táblázat egyes soraiban az asztalon lévő cédulák megfelelő sorrendjét adja meg! (A megadott táblázat sorainak a száma lehet több, kevesebb vagy ugyanannyi, mint a felsorolandó esetek száma. Ennek megfelelően hagyja üresen a felesleges mezőket, vagy egészítse ki újabb mezőkkel a táblázatot, ha szükséges!) (6 pont)

		A húzó neve				
		A	B	C	D	E
A cédulák megfelelő sorrendjei						E
						E
						E
						E
						E
						E

c) Az ajándékok átadása után mind az ötven moziba mentek, és a nézőtéren egymás mellett foglaltak helyet. Hány különböző módon kerülhetett erre sor, ha tudjuk, hogy a két fiú nem ült egymás mellett? (6 pont)

Megoldás:

a) Lásd: Valószínűségszámítás 28. feladat

b) Táblázat (6 pont)

c) Azt a két helyet, ahol a fiúk ülhetnek (nem egymás mellett), 6-féleképpen választhatjuk ki, (1 pont)

mert $\binom{5}{2} - 4 = 6$. (1 pont)

A két kiválasztott helyen a fiúk 2-féleképpen helyezkedhetnek el. (1 pont)

A lányok minden egyes esetben $3! = 6$ különböző módon ülhetnek le egymáshoz képest. (1 pont)

Összesen tehát $6 \cdot 2 \cdot 6 =$ (1 pont)

$= 72$ különböző módon ülhetnek le. (1 pont)

Komplementer halmazzal is számolhatunk.

Összesen: 17 pont

18)

a) Hány olyan négy különböző számjegyből álló négyjegyű számot tudunk készíteni, amelynek mindegyik számjegye eleme az $\{1;2;3;4;5;6;7\}$ halmaznak? (3 pont)

b) Hány 4-gyel osztható hétjegyű szám alkotható az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből? (6 pont)

		A húzó neve				
		A	B	C	D	E
A cédulák megfelelő sorrendjei		B	A	D	C	E
		B	C	D	A	E
		B	D	A	C	E
		C	A	D	B	E
		C	D	A	B	E
		C	D	B	A	E
		D	A	B	C	E
		D	C	A	B	E
		D	C	B	A	E

- c) Hány olyan hatjegyű, hárommal osztható szám írható fel, amely csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket tartalmazza, és e számjegyek mindegyike legalább egyszer előfordul benne? (8 pont)

Megoldás:

- a) Összesen $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$, (2 pont)
azaz **840** négyjegyű számot lehet készíteni. (1 pont)
- b) Az első öt számjegy mindegyike lehet az 1, 2, 3, 4, 5 számok közül bármelyik, ez összesen $5^5 (= 3125)$ lehetőség. (2 pont)
Az utolsó két számjegy a 4-gyel való oszthatóság miatt csak a következő öt eset valamelyike lehet: 12, 24, 32, 44, 52. (2 pont)
Összesen $5^5 \cdot 5$ (1 pont)
azaz **15 625** hétjegyű szám alkotható. (1 pont)
- c) Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek mindegyike szerepel a hatjegyű számban, közülük az egyik pontosan kétszer. (1 pont)
Csak a 3-as számjegy lehet az, amelyik kétszer fordul elő, (1 pont)
mert a számjegyek összegének 3-mal oszthatónak kell lennie, (1 pont)
és $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ (ami osztható 3-mal). (1 pont)
A két 3-as számjegy helyét $\binom{6}{2}$ -féleképpen választhatjuk meg. (1 pont)
A megmaradó 4 helyre $4!$ -féleképpen helyezhető el a többi számjegy. (1 pont)
A megfelelő hatjegyű számokból összesen $\binom{6}{2} \cdot 4!$, (1 pont)
azaz **360 darab** van. (1 pont)

Összesen: 17 pont

- 19) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis! (2 pont)

- a) Hét tanulóból négyet ugyanannyiféleképpen lehet kiválasztani, mint hármat, ha a kiválasztás sorrendjétől mindkét esetben eltekintünk.
- b) Van olyan x valós szám, amelyre igaz, hogy $\sqrt{x^2} = -x$

Megoldás:

- a) igaz (1 pont)
b) igaz (1 pont)
- Összesen: 2 pont**

- 20) Egy futóverseny döntőjébe hat versenyző jutott, jelöljük őket A, B, C, D, E és F betűvel. A cél előtt pár méterrel már látható, hogy C biztosan utolsó lesz, továbbá az is biztos, hogy B és D osztozik majd az első két helyen. Hányféleképpen alakulhat a hat versenyző sorrendje a célban, ha nincs holtverseny? Válaszát indokolja! (3 pont)

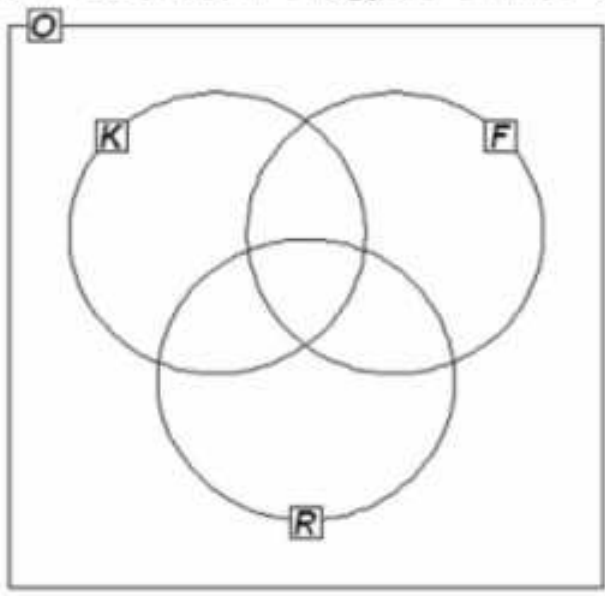
Megoldás:

- B és D az első két helyen 2-féleképpen végezhet. (1 pont)
Mögöttük A, E és F sorrendje $3! = 6$ -féle lehet. (1 pont)
Így összesen $2 \cdot 6 = 12$ -féleképpen érhetnek célba a versenyzők. (1 pont)

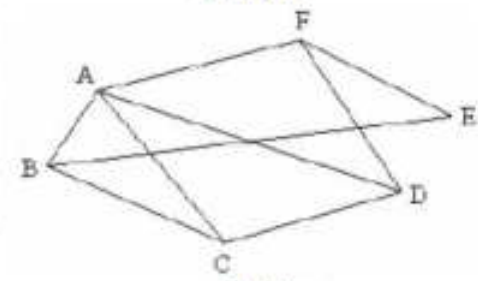
Összesen: 3 pont

21) Egy osztályban a következő háromféle sportkört hirdették meg: kosárlabda, foci és röplabda. Az osztály 30 tanulója közül kosárlabdára 14, focira 19, röplabdára 14 tanuló jelentkezett. Ketten egyik sportra sem jelentkeztek. Három gyerek kosárlabdázik és focizik, de nem röplabdázik, hatan fociznak és röplabdáznak, de nem kosaraznak, ketten pedig kosárlabdáznak és röplabdáznak, de nem fociznak. Négyen mind a háromféle sportot üzik.

- a) Írja be a megadott halmazábrába (1. ábra) a szövegnek megfelelő számokat! (4 pont)
- b) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! A focira jelentkezett tanulók közül mindenkinek van testvér. (2 pont)
- c) A focira jelentkezett 19 tanulóból öten vehetnek részt egy edzőtáborban. Igazolja, hogy több, mint 10 000-féleképpen lehet kiválasztani az öt tanulót! (3 pont)
- d) Az iskolák közötti labdarúgóbajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a 2. ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban? (Válaszát indokolja!) (3 pont)



1. ábra



2. ábra

Megoldás:

- a) Lásd: Halmazok 19. feladat
- b) Lásd: Logika, gráfok 15. feladat
- c) Az öt tanulót $\binom{19}{5} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{5!} = 11628$ -féleképpen lehet kiválasztani. (3 pont)
- d) Lásd: Logika, gráfok 15. feladat

Összesen: 12 pont

22) Anna, Béla, Cili és Dénes színházba megy. Jegyük a baloldal 10. sor 1., 2., 3., 4. helyére szól.

- a) Hányféle sorrendben tudnak leülni a négy helyre? (2 pont)
- b) Hányféleképpen tudnak leülni a négy helyre úgy, hogy Anna és Béla egymás mellé kerüljenek? (3 pont)
- c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna és Béla jegye egymás mellé szól, ha a fenti négy jegyet véletlenszerűen osztjuk ki közöttük? (4 pont)

A színház 1200 személyes. A szombati előadásra az összes jegy elkel. Az eladott jegyek 40%-a 800 Ft-os, 25%-a 1000 Ft-os, 20%-a 1200 Ft-os, 15%-a 1500 Ft-os jegy volt.

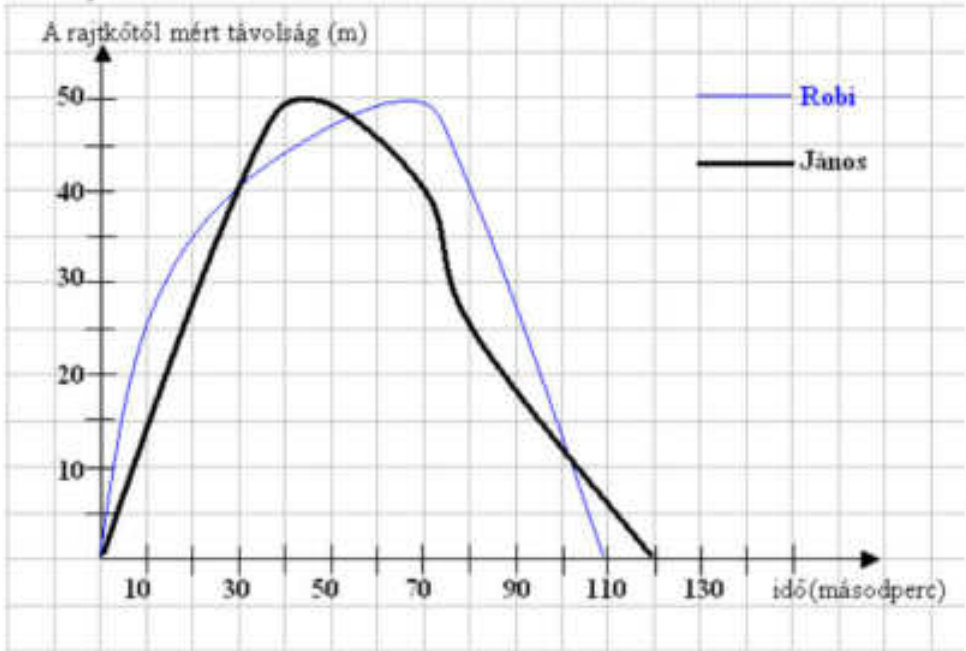
- d) Ábrázolja kördiagramon az eladott jegyek jegyárak szerinti százalékos megoszlását! (3 pont)
- e) Számítsa ki, hogy átlagosan mennyibe kerül egy színházjegy! (5 pont)

Megoldás:

- a) **4! = 24.** (2 pont)
- b) Anna és Béla egymás mellett ülnek, ezért egy „elemnek” tekinthetjük őket, azaz 3 elemet kell permutálnunk: 3!. (2 pont)
Anna és Béla bármelyik fenti sorrendben helyet cserélhetnek egymással, ezért azon esetek száma, amikor Anna és Béla egymás mellett ülnek: **3! · 2 = 12** (1 pont)
- c) *Lásd: Valószínűségszámítás 37. feladat*
- d) *Lásd: Statisztika 56. feladat*
- e) *Lásd: Statisztika 56. feladat*

Összesen: 17 pont

23) Egy sportuszoda 50 méteres medencéjében egy edzés végén úszóversenyt rendeztek. A versenyt figyelve az edző a következő grafikont rajzolta két tanítványának, Robinak és Jánosnak az úzásáról.



Olvassa le a grafikonról, hogy

- a) **Mennyi volt a legnagyobb távolság a két fiú között a verseny során** (1 pont)
 - b) **Mikor előzte meg János Robit** (2 pont)
 - c) **Melyikük volt gyorsabb a 35. másodpercben!** (2 pont)
- A 4*100-as gyorsváltó házi versenyén a döntőbe a Delfinek, a Halak, a Vidrák és a Cápák csapata került.**
- d) **Hányféle sorrend lehetséges közöttük, ha azt biztosan tudjuk, hogy nem a Delfinek csapata lesz a negyedik?** (3 pont)
 - e) **A verseny után kiderült, hogy az élen kettős holtverseny alakult ki, és a Delfinek valóban nem lettek az utolsók. Feltéve, hogy valakinek csak ezek az információk jutottak a tudomására, akkor ennek megfelelően hányféle eredménylistát állíthatott össze?** (4 pont)

Megoldás:

- a) *Lásd: Szöveges feladatok 28. feladat*
- b) *Lásd: Szöveges feladatok 28. feladat*
- c) *Lásd: Szöveges feladatok 28. feladat*
- d) A lehetséges sorrendek száma: **3 · 3 · 2 · 1 = 18** (3 pont)
- e) Két esetet kell megvizsgálni (1 pont)

- Ha a Delfinek holtversenyben az első helyen végeztek, akkor: $\binom{3}{1}$ a lehetséges sorrendek száma (1 pont)
- Ha a Delfinek nem lettek elsők, akkor $\binom{3}{2}$ a megoldás (1 pont)
- A lehetséges sorrendek száma összesen **9**. (1 pont)
- Összesen: 12 pont**

24)

- a) Egy memóriajáték 30 olyan egyforma méretű lapból áll, melyek egyik oldalán egy-egy egész szám áll az 1, 2, 3, ... 14, 15 számok közül. Mindegyik szám pontosan két lapon szerepel. A lapok másik oldala (a hátoldala) teljesen azonos mintázatú. A 30 lapot összekeverjük. A játék kezdetén a lapokat az asztalra helyezzük egymás mellé, hátoldalukkal felfelé fordítva, így a számok nem látszanak. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a játék kezdetén két lapot véletlenszerűen kiválasztva a lapokon álló számok megegyeznek! (5 pont)
- b) Egy dominókészlet azonos méretű kövekből áll. Minden dominóko egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részekben elhelyezett pöttyök száma 0-tól 6-ig bármi lehet. Minden lehetséges párosításnak léteznie kell, de két egyforma kő nem lehet egy készletben. Az ábrán két kő látható: a 4-4-es és a 0-5-ös (vagy 5-0-ás). Hány kőből áll egy dominókészlet? (6 pont)



- c) A „Ki nevet a végén?” nevű társasjátékban egy játékos akkor indulhat el a pályán, amikor egy szabályos dobókockával 6-ost dob. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy valaki pontosan a harmadik dobására indulhat el a pályán! (6 pont)

Megoldás:

- a) *Lásd: Valószínűségszámítás 41. feladat*
- b) Összesen 7 olyan kő van, amelyen a két részben azonos a pöttyök száma. (2 pont)
- A kő két részén (a két részt megkülönböztetve) különböző számú pöttyöt $7 \cdot 6 = 42$ -féleképpen lehetne elhelyezni, (2 pont)
- de így minden ilyen követ kétszer számolnánk, ezért ezek száma 21. (1 pont)
- Összesen **28 kő** van a teljes készletben. (1 pont)
- c) *Lásd: Valószínűségszámítás 41. feladat*

Összesen: 17 pont

25) A vízi élőhelyek egyik nagy problémája az algásodás. Megfelelő fény- és hőmérsékleti viszonyok mellett az algával borított terület nagysága akár 1-2 nap alatt megduplázódhat.

- a) Egy kerti tóban minden nap (az előző napi mennyiséghez képest) ugyanannyi-szorosára növekedett az algával borított terület nagysága. A kezdetben $1,5 \text{ m}^2$ -en észlelhető alga hét napi növekedés után borította be teljesen a 27 m^2 -es tavat. Számítsa ki, hogy naponta hány-szorosára növekedett az algás terület! (4 pont)

Egy parkbeli szökőkút medencéjének alakja szabályos hatszög alapú egyenes hasáb. A szabályos hatszög egy oldala 2,4 m hosszú, a medence mélysége 0,4 m. A medence alját és oldalfalait csempével burkolták, majd a medencét teljesen feltöltötték vízzel.

b) Hány m^2 területű a csempével burkolt felület, és legfeljebb hány liter víz fér el a medencében? (8 pont)

A szökőkútban hat egymás mellett, egy vonalban elhelyezett kiömlő nyíláson keresztül törhet a magasba a víz. Minden vízsugarat egy-egy színes lámpa világít meg. Mindegyik vízsugár megvilágítása háromféle színű lehet: kék, piros vagy sárga. Az egyik látványprogram úgy változtatja a vízsugarak megvilágítását, hogy egy adott pillanatban három-három vízsugár színe azonos legyen, de mind a hat ne legyen azonos színű (például kék-sárga-sárga-kék-sárga-kék).

c) Hányféle különböző látványt nyújthat ez a program, ha vízsugaraknak csak a színe változik? (5 pont)

Megoldás:

a) Lásd: Sorozatok 29. feladat; Térgeometria 26. feladat

b) Lásd: Térgeometria 26. feladat

c) Ha például a kék és a sárga színt választották ki, akkor $\binom{6}{3} = 20$ különböző

módon választható ki az a három vízsugár, amelyet a kék színnel világítanak meg (a másik három fénysugarat ugyanekkor sárga színnel világítják meg).

(2 pont)

A megvilágításhoz két színt háromféleképpen választhatnak ki (kék-sárga, kék-piros, piros-sárga).

(1 pont)

$$3 \cdot \binom{6}{3} = 60$$

(1 pont)

Azaz **60** különböző megvilágítás lehetséges.

(1 pont)

Összesen: 17 pont

26) András és Péter „számkártyázik” egymással. A játék kezdetén mindkét fiúnál hat-hat lap van: az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számkártya. Egy mérkőzés hat csata megvívását jelenti, egy csata pedig abból áll, hogy András és Péter egyszerre helyez el az asztalon egy-egy számkártyát. A csatát az nyeri, aki a nagyobb értékű kártyát tette le. A nyertes elviszi mindkét kijátszott lapot. (Például, ha András a 4-est, Péter a 2-est teszi le, akkor András viszi el ezt a két lapot.) Ha ugyanaz a szám szerepel a két kijátszott számkártyán, akkor a csata döntetlenre végződik. Ekkor mindketten egy-egy kártyát visznek el. Az elvitt kártyákat a játékosok maguk előtt helyezik el, ezeket a továbbiakban már nem játsszák ki.

1 2 3 4 5 6

a) Hány kártya van Péter előtt az első mérkőzés után, ha András az 1, 2, 3, 4, 5, 6, Péter pedig a 2, 4, 5, 3, 1, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait? (2 pont)

A második mérkőzés során Péter az 1, 2, 3, 4, 5, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait, és így összesen két lapot vitt el.

b) Adjon meg egy lehetséges sorrendet, amelyben András kijátszhatta lapjait! (3 pont)

A harmadik mérkőzés hat csatája előtt András elhatározta, hogy az első csatában a 2-es, a másodikban a 3-as számkártyát teszi majd le, Péter pedig úgy döntött, hogy ő véletlenszerűen játssza ki a lapjait (alaposan megkeveri a hat kártyát, és mindig a felül lévőket küldi csatába).

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első két csatát Péter nyeri meg! (6 pont)

A negyedik mérkőzés előtt mindketten úgy döntöttek, hogy az egész mérkőzés során véletlenszerűen játsszák majd ki a lapjaikat. Az első három csata után Andrásnál a 3, 4, 6 számkártyák maradtak, Péternél pedig az 1, 5, 6 számkártyák.

d) Adja meg annak a valószínűségét, hogy András az utolsó három csatából pontosan kettőt nyer meg! (6 pont)

Megoldás:

a) Péter megnyert három csatát (kettőt elvesztett), egy csata pedig döntetlenre végződött, (1 pont)

így Péter előtt összesen **hét kártya van** az első mérkőzés után. (1 pont)

b) Péter úgy vihetett el két lapot, ha egy csatát nyert és ötöt elvesztett, vagy két csatában döntetlent ért el, és négyet elvesztett. (1 pont)

András lapjainak (egyetlen lehetséges) sorrendje:

2, 3, 4, 5, 6, 1. (2 pont)

c) Lásd: Valószínűségszámítás 43. feladat

d) Lásd: Valószínűségszámítás 43. feladat

Összesen: 17 pont

27) A biliárdjáték megkezdésekor az asztalon 15 darab azonos méretű, színezésű biliárdgolyót helyezünk el háromszög alakban úgy, hogy az első sorban 5 golyó legyen, a másodikban 4, a következőkben pedig 3, 2, illetve 1 golyó. (A golyók elhelyezésére vonatkozó egyéb szabályoktól tekintsünk el.)

a) Hányféleképpen lehet kiválasztani a 15-ből azt az 5 golyót, amelyet majd az első sorban helyezünk el? (Az 5 golyó sorrendjét nem vesszük figyelembe.) (3 pont)

b) Hányféle különböző módon lehet az első két sort kirakni, ha a 9 golyó sorrendjét is figyelembe vesszük? (3 pont)

Egy biliárdasztal játékterülete téglalap alakú, mérete 194 cm × 97 cm. A játékterület középpontja felett 85 cm-rel egy olyan (pontoszerűnek tekinthető) lámpa van, amely fénykúpjának a nyílásszöge 100°.

c) Számítással állapítsa meg, hogy a lámpa megvilágítja-e a játékterület minden pontját! (11 pont)

Megoldás:

a) 15 golyóból az első sorba kerülő 5-öt $\binom{15}{5} =$ (2 pont)

= 3003 -féleképpen lehet kiválasztani. (1 pont)

b) A lehetséges különböző kirakások száma:

$15 \cdot 14 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 7 =$ (2 pont)

= 1816214400. (1 pont)

c) Lásd: Térgeometria 29. feladat

Összesen: 17 pont

28) A biológiaérettségi egyik tesztkérdésénél a megadott öt válaszlehetőség közül a két jót kell megjelölni.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az öt lehetőség közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva a két jó választ találjuk el! (3 pont)

Nóri, Judit és Gergő egy 58 kérdésből álló biológiateszttel mérik fel tudásukat az érettségi előtt. A kitöltés után, a helyes válaszokat megnézve az derült ki, hogy Nóri 32, Judit 38 kérdést válaszolt meg helyesen, és 21 olyan kérdés volt, amelyre mindketten jó választ adtak. Megállapították azt is, hogy 11 kérdésre mindhárman helyesen válaszoltak, és Gergő helyesen megoldott feladati közül 17-et Nóri is, 19-et Judit is jól oldott meg. Volt viszont 4 olyan kérdés, amelyet egyikük sem tudott jól megválaszolni.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kérdést véletlenszerűen kiválasztva, arra Gergő helyes választ adott! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (8 pont)

Nóri a biológia és kémia szóbeli érettségire készül. Biológiából 28, kémiából 30 tételt kell megtanulnia. Az első napra mindkét tárgyból 3-3 tételt szeretne kiválasztani, majd a kiválasztott tételeket sorba állítani úgy, hogy a két tantárgy tételei felváltva kövessék egymást.

c) Számítsa ki, hányféleképpen állíthatja össze Nóri az első napra szóló tanulási programját! (6 pont)

Megoldás:

a) Lásd: Valószínűségszámítás 48. feladat

b) Lásd: Valószínűségszámítás 48. feladat

c) A három megtanulandó biológiai tételt $\binom{28}{3}$, (1 pont)

a kémia tételeket $\binom{30}{3}$ -féleképpen lehet kiválasztani. (1 pont)

A kiválasztott tételeket tárgyaként $3!(=6)$ -féleképpen lehet sorba rendezni. (1 pont)

Az első tétel kétféle tárgyból választható, de a tárgyak sorrendje az első tétel kiválasztása után már adott. (1 pont)

A különböző sorrendek száma: $2 \cdot \binom{28}{3} \cdot 3! \cdot \binom{30}{3} \cdot 3!$. (1 pont)

Vagyis Nóri összesen **957640320**-féleképpen állíthatja össze a tételek sorrendjét. (1 pont)

Összesen: 17 pont

29) Hány kételemű részhalmaz van a $\{2; 3; 5; 7; 11\}$ halmaznak? (2 pont)

Megoldás:

Hogy az adott halmaznak hány kételemű részhalmaz van, egyenlő azzal, ahányféleképpen a halmaz elemeiből kiválaszthatunk 2 elemet úgy, hogy a sorrend nem számít. Vagyis ez ismétlés nélküli kombináció, az összes

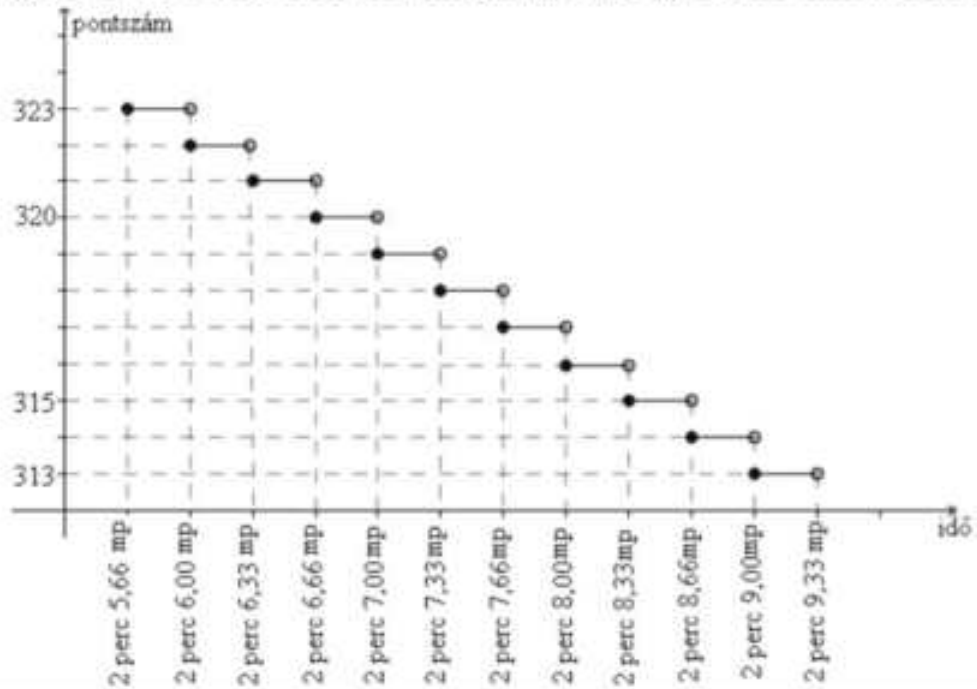
lehetséges kiválasztási mód pedig $\binom{5}{2} = 10$, így **10 db** kételemű részhalmaz

van a megadott halmaznak. (2 pont)

Összesen: 2 pont

30) Egy öttusaversenyen 31 résztvevő indult. A vívás az első szám, ahol mindenkiel egyszer mérkőzik meg. Aki 21 győzelmet arat, az 250 pontot kap. Aki ennél több győzelmet arat, az minden egyes további győzelemért 7 pontot kap a 250 ponton felül. Aki ennél kevesebbszer győz, attól annyszor vonnak le 7 pontot a 250-ből, ahány győzelem hiányzik a 21-hez. (A mérkőzések nem végződhetnek döntetlenre.)

- a) Hány pontot kapott a vívás során Péter, akinek 5 veresége volt? (3 pont)
- b) Hány győzelme volt Bencének, aki 215 pontot szerzett? (3 pont)



Az öttusa úszás számában 200 métert kell úszni. Az elért időeredményeként járó pontszámot mutatja a grafikon.

- c) Jelölje meg az alábbi két kérdés esetén a helyes választ!
Hány pontot kapott Robi, akinek az időeredménye 2 perc 6,28 másodperc? (2 pont)

- A: 320
- B: 321
- C: 322
- D: 323

Péter 317 pontot kapott. Az alábbiak közül válassza ki Péter időeredményét!

- A: 2 perc 7,00 mp
- B: 2 perc 7,60 mp
- C: 2 perc 7,80 mp
- D: 2 perc 8,00 mp

Az öttusa lovaglás számában egy akadálypályán tizenkét különböző akadályt kell a versenyzőnek átugrania. Egy akadály a nehézsége alapján három csoportba sorolható: A, B vagy C típusú. Ádám a verseny előtti bemelegítéskor először az öt darab A, majd a négy darab B, végül a három darab C típusú akadályokon ugrat át, mindegyiken pontosan egyszer. Bemelegítéskor az egyes akadálytípusokon belül a sorrend szabadon megválasztható.

- d) Számítsa ki, hogy a bemelegítés során hányféle sorrendben ugrathatja át Ádám a tizenkét akadályt! (4 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Szöveges feladatok 53. feladat
- b) Lásd: Szöveges feladatok 53. feladat
- c) Lásd: Statisztika 39. feladat
- d) Ádám az 5db A akadályon $5!$, a 4 db B akadályon $4!$ féleképpen, a 3 db C akadályon pedig $3!$ féleképpen tud átugrani. (2 pont)
Ez összesen $5! \cdot 4! \cdot 3!$, azaz **17280** lehetőség. (2 pont)

Összesen: 12 pont

- 31) Egy 2014 végén készült előrejelzés szerint az Indiában élő tigrisek t száma az elkövetkezendő években (az egyes évek végén) megközelítőleg a következő összefüggés szerint alakul: $t(x) = 3600 \cdot 0,854^x$, ahol x a 2014 óta eltelt évek számát jelöli.**
- a) Számítsa ki, hogy az előrejelzés alapján 2016 végére hány százalékkal csökken a tigrisek száma a 2014-es év végi adathoz képest! (4 pont)
 - b) Melyik évben várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökken? (4 pont)

Egy állatkert a tigrisek fennmaradása érdekében tenyésztő programba kezd. Beszereznek 4 hím és 5 nőstény kölyöktigrist, melyeket egy kisebb és egy nagyobb kifutóban kívánnak elhelyezni a következő szabályok mindegyikének betartásával:

- I) háromnál kevesebb tigris egyik kifutóban sem lehet;
 - II) a nagyobb kifutóba több tigris kerül, mint a kisebbikbe;
 - III) mindkét kifutóban hím és nőstény tigrist is el kell helyezni;
 - IV) egyik kifutóban sem lehet több hím, mint nőstény tigris.
- c) Hányféleképpen helyezhetik el a 9 tigrist a két kifutóban? (8 pont)
(A tigriseket megkülönböztetjük egymástól, és két elhelyezést eltérőnek tekintünk, ha van olyan tigris, amelyik az egyik elhelyezésben más kifutóban van, mint a másik helyezésben.)

Megoldás:

- a) Lásd: Szöveges feladatok 38. feladat
- b) Lásd: Szöveges feladatok 38. feladat
- c) A (I) és (II) miatt a kisebb kifutóba 3 vagy 4 tigris kerülhet. (1 pont)
Ha 3 tigris kerül a kisebb kifutóba, a (III) miatt (IV) miatt ez csak két nőstény és egy hím lehet. (1 pont)
Két nőstényt és egy hímét $\binom{5}{2} \cdot 4 = 40$ -féleképpen lehet összesen kiválasztani. (2 pont)
Ha 4 tigris kerül a kisebb kifutóba, akkor (III) és (IV) miatt ez csak két nőstény és két hím lehet, (1 pont)
őket $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = 60$ -féleképpen lehet kiválasztani. (2 pont)
Így összesen $40 + 60 = 100$ eset lehetséges. (1 pont)

Összesen: 17 pont

- 32) Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye különböző?** (2 pont)

Megoldás:

A százás helyiértékre 9 féle számjegyet írhatunk (1;2;3;4;6;7;8;9), a tízes helyiértékre is 9 félért, mivel minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel, és egyet már kiválasztottunk, viszont a 0-t is választhatjuk. Az egyesek helyére pedig már csak 8 féle számjegyet írhatunk. Így összesen $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ ilyen háromjegyű szám van. (2 pont)

Összesen: 2 pont

33) Zsófi gyertyákat szeretne önteni, hogy megajándékozhassa a barátait. Öntőformának egy négyzet alapú szabályos gúlát választ, melynek alapéle 6 cm, oldaléle 5 cm hosszúságú. Egy szaküzletben 11 cm oldalú, kocka alakú tömbökben árulják a gyertyának való viaszt. Ezt megolvasztva és az olvadt viaszt a formába öntve készülnek a gyertyák. (A számítások során tekintsen el az olvasztás és öntés során bekövetkező térfogatváltozástól.)

a) Legfeljebb hány gyertyát önthet Zsófi egy 11 cm oldalú, kocka alakú tömbből? (6 pont)

Zsófi az elkészült gúla alakú gyertyák lapjait szeretné kiszínezni. Mindegyik lapot (az alaplapot és az oldallapokat is) egy-egy színnek, kékkel vagy zölddel fogja színezni.

b) Hányféle különböző gyertyát tud Zsófi ilyen módon elkészíteni? (Két gyertyát különbözőnek tekintünk, ha forgással nem vihetők egymásba.) (6 pont)

Zsófi a gyertyák öntéséhez három különböző fajta „varázskanócot” használ. Mindegyik fajta „varázskanóc” fehér színű, de a meggyújtáskor (a benne lévő anyagtól függően) az egyik fajta piros, a másik lila, a harmadik narancssárga lánggal ég, Zsófi hétfőn egy dobozba tesz 6 darab gyertyát, mindhárom fajtából kettőt-kettőt. Keddtől kezdve minden nap véletlenszerűen kivesz egy gyertyát a dobozból, és meggyújtja.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Zsófi az első három nap három különböző színű lánggal égő gyertyát gyújt meg! (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Térgeometria 33. feladat*

b) Az alaplapot kétféleképpen lehet kiszínezni. (1 pont)

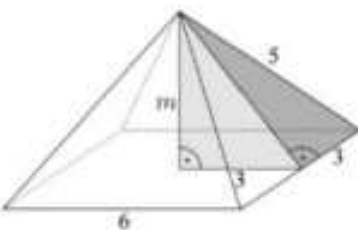
Az oldallapok lehetnek ugyanolyan színűek, mindegyik kék, vagy mindegyik zöld, ez összesen két eset. (1 pont)

Lehet három oldallap zöld és egy kék, vagy három oldallap kék és egy zöld, ez is összesen két eset. (1 pont)

Olyan festésből, amikor két oldallap zöld és két oldallap kék, szintén kétféle lehet, attól függően, hogy az ugyanolyan színű lapok szomszédosak vagy szemköztiek. (1 pont)

Az oldallapokat tehát hatféleképpen lehet kiszínezni, így összesen $2 \cdot 6 = 12$ különböző színezés készíthető. (2 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 53. feladat*



Összesen: 17 pont

34)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán! (5 pont)
$$(2x - 3)^2 = x^2$$

b) Hány olyan (pozitív) háromjegyű páratlan szám van a tízes számrendszerben, amelynek minden számjegye különböző? (5 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 35. feladat
- b) A kérdéses számok utolsó számjegye ötféle lehet (1, 3, 5, 7 vagy 9). (1 pont)
Az első számjegy nem lehet 0, (1 pont)
és különböznie kell az utolsótól, így az utolsó számjegy rögzítése után nyolcféle lehet. (1 pont)
A második számjegy (amelynek különböznie kell az elsőől és az utolsótól, azok rögzítése után) nyolcféle lehet. (1 pont)
A lehetőségek száma ezek szorzata, azaz: $8 \cdot 8 \cdot 5 = 320$. (1 pont)

Összesen: 10 pont

35) Egy jégkrémgyártó üzem fagylalttölcséreket rendel. A csonkakúp alakú fagylalttölcsér belső méretei: felső átmérő 7 cm, alsó átmérő 4 cm, magasság 8 cm.

- a) Számítsa ki, hogy a tölcsérbe legfeljebb hány cm^3 jégkrém fér el, ha a jégkrém – a csomagolás miatt – csak a felső perem síkjáig érhet! (3 pont)

Ennek a tölcsérnek létezik olyan változata is, amelynek a belső felületétvékony csokoládéréteggel vonják be. 1 kg csokoládé kb. $0,7\text{m}^2$ felületbevonásához elegendő.

- b) Számítsa ki, hogy hány kilogramm csokoládéra van szükség 1000 darab tölcsér belső felületének bevonásához! Válaszát egész kilogrammra kerekítve adja meg! (9 pont)

Egy fagylaltozóban hatféle ízű fagylalt kapható: vanília, csokoládé, puncs, eper, málna és dió. Andrea olyan háromgombócos fagylaltot szeretne venni tölcsérbe, amely kétféle ízű fagylaltból áll.

- c) Hányféle különböző háromgombócos fagylaltot kérhet, ha számít a gombócok sorrendje is? (Például a dió-dió-vanília más kérdésnek számít, mint a dió-vanília-dió.) (5 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Térgeometria 38. feladat
- b) Lásd: Térgeometria 38. feladat
- c) Az első két gombóc 6 esetben lehet egyforma. (1 pont)
Mindegyik esetben 5-féle lehet a harmadik gombóc, ami $6 \cdot 5 = 30$ féle lehetőség. (1 pont)
Az első két gombóc $6 \cdot 5$ esetben lehet különböző, mindegyik esetben 2-féle lehet a harmadik gombóc, ami $6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$ lehetőség. (2 pont)
Összesen tehát $30 + 60 = 90$ féleképpen kérhet. (1 pont)

Összesen: 17 pont



36) A 32 lapos magyar kártyában négy szín (piros, zöld, tök, makk), és minden színből nyolcféle lap van (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász). Hányféleképpen tudunk a 32 kártyából egyszerre 3 lapot kihúzni úgy, hogy a piros ász köztük legyen? (2 pont)

Megoldás:

Mivel a piros ászt biztosan ki szeretnénk húzni, és ezt csak 1 féleképpen tehetjük meg, azt kell kiszámolnunk, hogy a másik 2 lapot hányféleképpen húzhatjuk ki. A piros ászon kívül 31 kártya van még a pakliban, tehát

$$\binom{1}{1}\binom{31}{2} = 465 \text{ féleképpen tudunk választani.} \quad (2 \text{ pont})$$

37) Barnabás telefonján a képernyő átlója 5,4 col (1 col $\approx$ 25,4 mm), a képernyő oldalainak aránya 16:9. A telefon téglalap alakú előlapján a képernyő alatt és felett 12-12 mm, két oldalán 3-3 mm szélességű szegély van.

a) Mekkora a telefon előlapjának oldalai? Válaszát egész mm-re kerekítve adja meg! (6 pont)

Tanár			
A	B	C	

Az írásbeli érettségi vizsga megkezdése előtt a felügyelő tanár megkéri a vizsgázókat, hogy telefonjaikat kikapcsolt állapotban tegyék ki a tanári asztalra. Általános tapasztalat, hogy egy-egy diák a „vizsgaláz” miatt 0,02 valószínűséggel bekapcsolva felejtí a telefonját.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a teremben lévő 12 vizsgázó közül legalább egy bekapcsolva felejtí a telefonját? (3 pont)

A vizsgateremben lévő 12 egyszemélyes pad négy egymás melletti oszlopba van rendezve. Mindegyik oszlopban három egymás mögötti pad áll. Julcsi és Tercsi jó barátnők, elhatározzák, hogy a vizsgán két egymás melletti padba ülnek. (Például ha Julcsi a B-vel jelölt padban ül, akkor Tercsi az A vagy C jelű padot foglalja el.)

c) Hányféleképpen ülhet le a 12 vizsgázó a teremben úgy, hogy Julcsi és Tercsi valóban két egymás melletti padban üljön? (5 pont)

Az iskolában érettségiző 100 tanuló matematika írásbeli érettségi vizsgájának pontszámairól készült összesítést mutatja a táblázat.

Pontszám	Tanulók száma
0-20	0
21-30	8
31-40	12
41-50	8
51-60	18
61-70	20
71-80	12
81-90	16
91-100	6

d) A táblázat alapján mennyi a 100 tanuló pontszámának lehetséges legmagasabb átlaga? (3 pont)

Megoldás:

a) Lásd: Síkgeometria 51. feladat

- b) *Lásd: Valószínűségszámítás 64. feladat*
- c) Ha a két lány az első sorban ül le, akkor háromféleképpen választhatnak két egymás melletti padot. (1 pont)
Ha a második vagy a harmadik sort választják, ott szintén 3-3-féleképpen választhatnak két padot. Ez összesen 9 lehetőség. (1 pont)
Mind a 9 esetben Tercsi és Julcsi kétféleképpen tud leülni a két székre, ez 18 lehetőség. (1 pont)
A többi 10 vizsgázó $10! = 3\,628\,800$ -féleképpen tudja elfoglalni a maradék 10 széket. (1 pont)
Így összesen $18 \cdot 10! = \mathbf{65\,318\,400}$ -féleképpen tudnak leülni a vizsgázók úgy, hogy Julcsi és Tercsi két egymás melletti padban üljön. (1 pont)
- d) *Lásd: Statisztika 51. feladat*

Összesen: 17 pont

38) Négy gombóc fagyaltot vásárolunk tölcsérbe: egy csokoládét, egy vaniliát, egy puncsot és egy eperízűt. Hányféle olyan sorrendje lehetséges ennek a négy gombócnak, amelynél nem a csokoládé a legalsó? (2 pont)

Megoldás:

A csokoládé legalulra nem kerülhet, így oda 3 lehetséges íz mehet, a többi helynél már számításba kell vennünk a csokoládét is, így a második helyre is 3 lehetséges íz kerülhet, a harmadikra 2 és az utolsóira meg az az 1, ami marad. Tehát a lehetséges sorrendek száma $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{18}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

39) Péter elhatározza, hogy összegyűjt 3,5 millió Ft-ot egy használt elektromos autó vásárlására, mégpedig úgy, hogy havonta egyre több pénzt tesz félre a takarékszámláján. Az első hónapban 50 000 Ft-ot tesz félre, majd minden hónapban 1000 Ft-tal többet, mint az azt megelőző hónapban. (A számlán gyűjtött összeg kamatozásával Péter nem számol.)
a) Össze tud-e így gyűjteni Péter 4 év alatt 3,5 millió forintot? (5 pont)

A világon gyártott elektromos autók számának 2012 és 2017 közötti alakulását az alábbi táblázat mutatja.

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017
elektromos autók száma (ezerre kerekítve)	110 000	221 000	409 000	727 000	1 186 000	1 928 000

b) Szemléltesse a táblázat adatait oszlopdiagramon! (3 pont)

Péter az előző táblázat adatai alapján olyan matematikai modellt alkotott, amely az elektromos autók számát exponenciálisan növekedőnek tekinti. E szerint, ha a 2012 óta eltelt évek száma x , akkor az elektromos autók számát (millió darabra) megközelítőleg az $f(x) = 0,122 \cdot 2^{0,822x}$ összefüggés adja meg.

- c) A modell alapján számolva melyik évben érheti el az elektromos autók száma a 25 millió darabot? (5 pont)

Egy elektromos autókat gyártó cég öt különböző típusú autót gyárt. A készülő reklámfüzet fedőlapjára az ötféle típus közül egy vagy több (akár mind az öt) autótípus képét szeretné elhelyezni a grafikus.

- d) Hány lehetőség közül választhat a tervezés során? (Két lehetőség különböző, ha az egyikben szerepel olyan autótípus, amely a másikban nem.) (4 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Sorozatok 53. feladat
b) Lásd: Statisztika 52. feladat
c) Lásd: Exponenciális és logaritmikus feladatok 35. feladat
d) A grafikus 1 típust vagy 4 típust 5-féleképpen választhat ki. (1 pont)

2 vagy 3 típust $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$ -féleképpen választhat ki. (1 pont)

Mind az 5 típust 1-féleképpen választhatja ki. (1 pont)

Összesen $5 + 5 + 10 + 10 + 1 = 31$ -féleképpen alakulhat a reklámfüzet fedőlapja a megjelenített típusok szempontjából. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Mind az öt típus esetén két választási lehetőség van (szerepel vagy nem szerepel a fedőlapon). Ez összesen $2^5 = 32$ lehetőséget jelent. (2 pont)

Az a kiválasztás, amelyben egy elem sincs kiválasztva nem megfelelő. (1 pont)

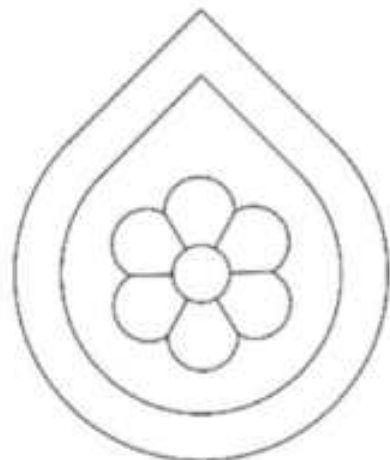
Így $32 - 1 = 31$ -féleképpen alakulhat a reklámfüzet fedőlapja a megjelenített típusok szempontjából. (1 pont)

Összesen: 17 pont

- 40) A Föld teljes vízkészlete (jég, víz és vízgőz) folyékony halmazállapotban közel 1400 millió km^3 lenne. Ennek a vízkészletnek csupán 3%-a édesvíz, melynek valójában mindössze 20%-a folyékony halmazállapotú (a többi főleg a sarkvidék jégtakarójában található fagyott, szilárd állapotban).

- a) Számítsa ki, hogy hány kilométer lenne annak a legkisebb gömbnek a sugara, amelybe összegyűjthetnénk a Föld folyékony édesvízkészletét! Válaszát egész kilométerre kerekítve adja meg! (6 pont)

Az ábrán egy környezetvédő szervezet logójának ki nem színezett terve látható. A logó kilenc tartományát három színnel (sárga, kék és zöld) szeretnénk kiszínezni úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek. (Két tartomány szomszédos, ha a határvonalainak van közös pontja. Egy-egy tartomány színezéséhez egy színt használhatunk.)



- b) Hányféleképpen lehet a logót a feltételeknek megfelelően kiszínezni? (6 pont)

Egy iskolai italautomata meghibásodott, és véletlenszerűen ad szénsavas, illetve szénsavmentes vizet. A diákok tapasztalata szerint, ha valaki szénsavmentes vizet kér, akkor csak 0,8 a valószínűsége annak, hogy valóban szénsavmentes vizet kap. Anna a hét mind az öt munkanapján egy-egy szénsavmentes vizet szeretne vásárolni az automatából, így minden nap az ennek megfelelő gombot nyomja meg.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább négy napon valóban szénsavmentes vizet ad az automata? (5 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Térgeometria 41. feladat
- b) Ha a középső, kör alakú tartomány pl. sárga színű, akkor a hat szíromforma egyike sem lehet sárga. (1 pont)
 Ekkor a szírmok váltakozva lehetnek kék, illetve zöld színűek, ami kétféleképpen valósulhat meg. (1 pont)
 A szírmok körüli tartomány ekkor csak sárga lehet. (1 pont)
 Ekkor a külső tartomány kék vagy zöld lehet. Ez szintén 2 lehetőség. (1 pont)
 A középső tartomány színe nemcsak sárga, hanem kék vagy zöld is lehet (3 lehetőség). (1 pont)
 Így a lehetséges színezések száma: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. (1 pont)
- c) Lásd: Valószínűségszámítás 66. feladat

Összesen: 17 pont

41) Szabó nagymamának öt unokája van, közülük egy lány és négy fiú. Nem szeret levelet írni, de minden héten ír egy-egy unokájának, így öt hét alatt mindegyik unoka kap levelet.

- a) Hányféle sorrendben kaphatják meg az unokák a levelüket az öt hét alatt? (3 pont)
- b) Ha a nagymama véletlenszerűen döntötte el, hogy melyik héten melyik unokájának írt levél következik, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy lányunokája levelét az ötödik héten írta meg? (3 pont)

Szabó nagymama sálát kötött egyetlen lányunokájának. Az első napon 8 cm készült el a sálból, és a nagymama elhatározta, hogy a további napokon mindennap 20 százalékkal többet köt meg, mint az előző napon. Ezt az elhatározását tartani tudta.

c) Hány nap alatt készült-el a 2 méter hosszú tervezett sál? (11 pont)

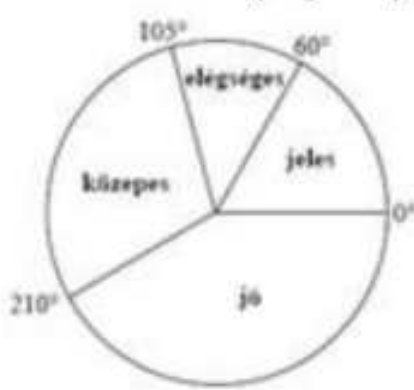
Megoldás:

- a) A lehetséges sorrendek száma: 5! (2 pont)
Az unokák 120-féle sorrendben kaphatják meg a levelet. (1 pont)
- b) Lásd: Valószínűségszámítás 14. feladat
- c) Lásd: Sorozatok 11. feladat

Összesen: 17 pont

42) A 12. évfolyam tanulói magyarból próbaérettségit írtak. Minden tanuló egy kódszámot kapott, amely az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekből mindegyiket pontosan egyszer tartalmazta valamilyen sorrendben.

- a) Hány tanuló írta meg a dolgozatot, ha az összes képezhető kódszámot mind kiosztották? (3 pont)
- b) Az alábbi kördiagram a dolgozatok eredményét szemlélteti:
Adja meg, hogy hány tanuló érte el a szereplő érdemjegyeket! Válaszát foglalja táblázatba, majd a táblázat adatait szemléltesse oszlopdiagramon is! (6 pont)
- c) Az összes megírt dolgozathoz véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy jeles vagy jó dolgozatot veszünk a kezünkbe? (3 pont)



Megoldás:

- a) Az összes képezhető kódok száma 5!. (2 pont)
120 tanuló írt dolgozatot. (1 pont)
- b) Lásd: Statisztika 5. feladat
- c) Lásd: Valószínűségszámítás 7. feladat

Összesen: 12 pont

43) Az alábbi táblázat András és Bea érettségi érdemjegyeit mutatja.

	András	Bea	Cili
Magyar nyelv és irodalom	3	4	
Matematika	4	5	
Történelem	4	4	
Angol nyelv	3	5	
Földrajz	5	5	

- a) Számítsa ki András jegyeinek átlagát és szórását! (3 pont)
Cili érettségi eredményéről azt tudjuk, hogy jegyeinek átlaga András és Bea jegyeinek átlaga közé esik, továbbá Cili jegyeinek a szórása 0.
- b) Töltse ki a táblázatot Cili jegyeivel! (3 pont)

Dávid is ebből az 5 tárgyból érettségizett, az 5 tárgy az ő bizonyítványában is a fenti sorrendben szerepel. Eredményeiről azt tudjuk, hogy jegyeinek mediánja 4, átlaga pedig 4,4 lett.

- c) Határozza meg Dávid osztályzatait és azt, hogy hányféleképpen lehetne ezekkel az osztályzatokkal kitölteni az érettségi bizonyítványát! (7 pont)

Az ábra a 24 fős osztály érettségi eredményeinek megoszlását mutatja matematikából. Tudjuk, hogy jeles osztályzatot 4 tanuló ért el.

- d) Az osztály tanulói közül hányan érettségiztek közepes eredménnyel matematikából?(4 pont)



Megoldás:

- a) *Lásd: Statisztika 25. feladat*
- b) *Lásd: Statisztika 25. feladat*
- c) Dávid jegyeinek összege 22, (1 pont)
jegyeit nagyság szerint sorba rendezve a középső 4-es. (1 pont)
A jegyek között 1-es, 2-es és 3-as nem szerepelhet. Négy darab 4-es nem lehet, mert akkor a jegyek összege nem lehet 22. (1 pont)
Dávid jegyei: 4; 4; 4; 5; 5. (1 pont)

Ezekkel a jegyekkel érettségi bizonyítványát $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2 pont)

= **10**-féleképpen lehet kitölteni. (1 pont)
- d) *Lásd: Statisztika 25. feladat*

Összesen: 17 pont

44) Az autókereskedés parkolójában 1–25-ig számozott hely van. Minden beérkező autó véletlenszerűen kap parkolóhelyszámot.

a) Az üres parkolóba elsőként beparkoló autó vezetőjének szerencseszáma a 7. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kapott parkolóhelyszámnak van hetes számjegye, vagy a szám hétnek többszöröse? (4 pont)

Május 10-én az üres parkolóba 25 kocsi érkezik: 12 ezüstszerű ötajtós, 4 piros négyajtós, 2 piros háromajtós és 7 zöld háromajtós.

b) Az üres parkolóba már beálltak a négy és ötajtós autók. Hányféleképpen állhatnak be az üresen maradt helyekre a háromajtósak? (Az azonos színű autókat nem különböztetjük meg egymástól.) (5 pont)

A május 10-re előjegyzett 25 vevő az autó színére is megfogalmazta előzetesen a kívánságait. Négyen zöld kocsit rendeltek, háromnak a piros szín kivételével mindegyik megfelel, öten akarnak piros vagy ezüst kocsit, tízen zöldet vagy pirosat. Három vevőnek mindegy, milyen színű kocsit vesz.

c) Színek szempontjából kielégíthető-e a május 10-re előjegyzett 25 vevő igénye az aznap reggel érkezett autókkal? (8 pont)

Megoldás:

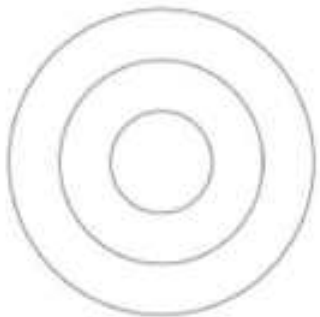
- a) *Lásd: Valószínűségszámítás 18. feladat*
- b) 9 betöltendő hely marad. (1 pont)

A 2 piros autó $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ -féleképpen állhat be, ezzel a zöld autók helye is eldőlt. (3 pont)

A lehetséges elhelyezkedések értéke **36**. (1 pont)
- c) Nézzük a zöld színt választókat! 4-en zöld kocsit rendeltek, és ezen kívül 10-en zöldet vagy pirosat. Mivel 6 db piros kocsi van, a zöldet vagy pirosat választó 10 vevő közül legalább 4-nek zöld kocsit kellene adni. (4 pont)
Zöld kocsiból viszont csak 7 db érkezik aznap, így a zöld kocsit választó vevők igényeit **nem lehet kielégíteni**, akárhogy is osztjuk a többi autót. (4 pont)

Összesen: 17 pont

45) Egy ajándéktárgyak készítésével foglalkozó kisiparos családi vállalkozása keretében zászlókat, kitűzőket is gyárt. Az ábrán az egyik általa készített kitűző stilizált képe látható. A kitűzőn lévő három mező kiszínezéséhez 5 szín (piros, kék, fehér, sárga, zöld) közül választhat. Egy mező kiszínezéséhez egy színt használ, és a különböző mezők lehetnek azonos színűek is.



- a) Hányféle háromszínű kitűzőt készíthet a kisiparos? (3 pont)
 - b) Hányféle kétszínű kitűző készíthető? (5 pont)
- A kisiparos elkészíti az összes lehetséges különböző (egy-, két- és háromszínű) kitűzőt egy-egy példányban, és véletlenszerűen kiválaszt közülük egyet.
- c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan kitűzőt választ, amelyen az egyik mező kék, egy másik sárga, a harmadik pedig zöld színű? (4 pont)

Megoldás:

- a) Ha három színt akarunk felhasználni, akkor a kitűző mezői különböző színűek lesznek. (1 pont)
 Az egyik (például a legbelső) mezőt 5-féle, a mellette levőt 4-féle, a harmadikat 3-féle színnel színezhetjük ki. (1 pont)
 Így $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ -féle háromszínű kitűzőt készíthetünk. (1 pont)
- b) Az ötből két színt $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen választhatunk ki. (2 pont)
 A három mező közül a két egyszínűt háromféleképpen lehet kiválasztani, és mindegyik esethez kétféle színezés tartozik, ez összesen 6 lehetőség. (2 pont)
 A kétszínű kitűzők száma így $10 \cdot 6 = 60$. (1 pont)
- c) Lásd: Valószínűségszámítás 34. feladat

Összesen: 12 pont

46) Egy háromszög csúcsai a koordináta rendszerben $A(-8;-12)$, $B(8;0)$ és $C(-1;12)$. Az A pontnak a B pontra vonatkozó tükörképe a D pont.

- a) Számítsa ki a D pont koordinátáit! (3 pont)
 - b) Írja fel az ABC háromszög B csúcsán áthaladó magasságvonalának egyenletét! (4 pont)
 - c) Igazolja, hogy az ABC háromszög B csúcsánál derékszög van! (4 pont)
- Az A , B és C pontokat szeretnénk a kék, zöld és sárga színekkel színezni úgy, hogy mindhárom pontot színezzük valamelyik színnel, de egy színezésen belül nem használjuk fel mindhárom színt.
- d) Hány különböző színezés lehetséges ezekkel a feltételekkel? (6 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Koordinátageometria 46. feladat
- b) Lásd: Koordinátageometria 46. feladat
- c) Lásd: Koordinátageometria 46. feladat
- d) Ha mindhárom pontot ugyanazzal a színnel színezzük, akkor három különböző színezés lehetséges. (1 pont)
 Ha két színt használunk fel, akkor azt a két színt háromféleképpen választhatjuk ki. (1 pont)

Legyen a két szín például a kék és a zöld. Ezzel a két színnel a három pontot 6-féleképpen színezhettük ki: KKZ, KZK, ZKK, ZZK, ZKZ, KZZ. (2 pont)

Így két színnel ($3 \cdot 6 =$) 18 különböző színezés létezik. (1 pont)

A lehetséges színezések száma ($3 + 18 =$) **21**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

47) Hány különböző hatjegyű szám készíthető két darab 2-es és négy darab 4-es számjegy felhasználásával? (2 pont)

Megoldás:

$$\left(\frac{6!}{2! \cdot 4!} \right) = 15 \quad (2 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

48) Dorka és hat barátnője egymás mellé kapott jegyeket a moziba. Hányféle sorrendben ülhet a hét lány egymás mellett, ha Dorka ül a szélső, 1-es számú széken? (2 pont)

Megoldás:

Dorka helye adott, így hat barátnőjének a sorrendjét kell meghatároznunk ismétlés nélküli permutációval. (1 pont)

$P_6 = 6! =$ **720-féle** sorrendben ülhetnek le. (1 pont)

Összesen: 2 pont

49) Az ábrán szereplő A, B, C, D és E pontok egy olyan egyenesre illeszkednek, amely párhuzamos az F és G pontokra illeszkedő egyenessel.

A B C D E
• • • • •

a) Hány olyan különböző egyenes létezik, amely az ábrán lévő pontok közül legalább kettőre illeszkedik? (3 pont)

• •
F G

b) Hány olyan háromszög van, amelynek a csúcsait az ábrán szereplő 7 pont közül választjuk ki? (Két háromszöget különbözőnek tekintünk, ha legalább az egyik csúcsukban eltérnek egymástól.) (5 pont)

Egy háromszög csúcsai: $K(-1; 5)$, $L(1; 1)$, $M(5; 3)$.

c) Igazolja, hogy a háromszög L-nél lévő szöge derékszög! (4 pont)

d) Írja fel a háromszög körülírt körének az egyenletét! (5 pont)

Megoldás:

a) $2 \cdot 5 = 10$ olyan egyenes van, amely illeszkedik az A, B, C, D, E pontok valamelyikére, illetve az F, G pontok valamelyikére. (2 pont)

Az A, B, C, D, E pontokra, valamint az F és G pontokra is illeszkedik 1-1 egyenes, összesen tehát **12** megfelelő egyenes van. (1 pont)

b) A három kiválasztott pont akkor alkot háromszöget, ha nem esnek egy egyenesre. (Az A, B, C, D, E pontok közül vagy 2-t választunk, vagy 1-et.) (1 pont)

Az A, B, C, D, E pontok közül 2-t $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen választhatunk ki és ezekhez a harmadik csúcsot 2-féleképpen (F és G közül) választhatjuk ki.

(1 pont)

Ebben az esetben tehát 20 különböző háromszög van. (1 pont)

Az A, B, C, D, E pontok közül 1-et 5-féleképpen választhatunk ki, és ezt kötjük össze F -vel és G -vel. Ebben az esetben tehát 5 különböző háromszög van.

(1 pont)

Így összesen $20 + 5 = \mathbf{25}$ háromszög létezik.

(1 pont)

Alternatív megoldás:

Komplementer összeszámolást alkalmazunk. A 7 pont közül 3-at $\binom{7}{3} = 35$ -

féleképpen választhatunk ki.

(2 pont)

Viszont ezek közül az egy egyenesre illeszkedő $\binom{5}{3} = 10$ darab ponthármas

nem alkot háromszöget.

(2 pont)

Így összesen $35 - 10 = \mathbf{25}$ háromszög létezik.

(1 pont)

c) *Lásd: Koordinátageometria 48. feladat*

d) *Lásd: Koordinátageometria 48. feladat*

Összesen: 17 pont